

Câu I. (2.5 điểm)

a) Ký hiệu $M_n(\mathbb{R})$ là tập tất cả ma trận vuông cấp n với các phần tử là số thực.

Đặt $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\}$. Phép nhân ma trận trên $M_n(\mathbb{R})$ có phải là một phép toán hai ngôi trên S không? Chứng minh rằng S cùng với phép nhân ma trận trên $M_n(\mathbb{R})$ tạo thành một nhóm.

b) Trong $\mathbb{Z}_{26}$ cho ma trận $K = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Hãy sử dụng mật mã Hill với khóa K để mã hóa tin nhắn

"WORLD C" và giải mã tin nhắn "VDZF". Biết bảng chữ cái được số hóa như bảng sau đây:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Câu II. (2.5 điểm)

Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$f(u) = (a + 2b + c \quad b + c \quad a + b)^T, \text{ với mọi } u = (a \quad b \quad c)^T \in \mathbb{R}^3.$$

a) Vectơ $w = (1 \quad -1 \quad 1)^T$ có thuộc $\text{Ker}(f)$?

b) Tìm một cơ sở của $\text{Im}(f)$ và $\text{Ker}(f)$.

c) Cho $C = \{v_1 = (1 \quad 1 \quad 1)^T, v_2 = (1 \quad 0 \quad 1)^T, v_3 = (0 \quad 1 \quad 1)^T\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm tất cả vectơ u thỏa $[f(u)]_C = (2 \quad 1 \quad -1)^T$.

Câu III. (2.5 điểm)

Cho dạng toàn phương

$$Q(X) = X^T A X = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3, \text{ với } X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

a) Đưa dạng toàn phương $Q(X)$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hóa trực giao.

b) Tính A^{2026} , biết A là ma trận của dạng toàn phương Q .

Câu IV. (2.5 điểm)

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số thực m

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - my + 2z = -1 \end{cases}$$

b) Cho A là ma trận vuông cấp n có các phần tử là số thực và I_n là ma trận đơn vị cấp n .
Biết

$$A^2 - 3A = 2I_n.$$

Chứng minh rằng A là một ma trận khả nghịch.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)		Nội dung kiểm tra
CLO1	Biết cách giải một hệ phương trình tuyến tính; biết cách biểu diễn một hệ phương trình tuyến tính dạng vectơ, dạng ma trận, phép biến đổi tuyến tính; Thực hiện được các phép toán trên ma trận; tính được định thức.	Câu II, III, IV
CLO2	Thực hiện được các bài toán cơ bản về không gian vectơ: biểu diễn tuyến tính; kiểm tra tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính; kiểm tra tập sinh, tìm cơ sở, số chiều; tìm tọa độ, ma trận đổi tọa độ.	Câu II
CLO3	Biết cách tìm giá trị riêng, vectơ riêng của một ma trận; chéo hóa ma trận; đưa một dạng toàn phương về dạng không có hạng tử tích chéo; tìm dấu của một dạng toàn phương.	Câu III
CLO4	Thực hiện các bài toán liên quan đến tích vô hướng Euclide: tính được tích vô hướng, độ dài, chuẩn; kiểm tra tính trực giao, trực chuẩn; tìm được phần bù trực giao, hình chiếu trực giao; trực giao hóa một hệ vectơ cơ sở	Câu III
CLO5	Biết cách kiểm tra các tính chất của một phép toán hai ngôi; kiểm tra nhóm, vành, trường; khái niệm mật mã, mật mã đối xứng, mật mã khóa bất đối xứng, một số hệ mã Affine, Hill, RSA.	Câu I

Ngày tháng 06 năm 2026

Thông qua bộ môn